Análisis Envolvente de Datos: Introducción y herramienta pública para su utilización

Maria Isabel Restrepo R.

Estudiante de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería – Universidad de Antioquia

maisa26@gmail.com.

Juan Guillermo Villegas R.

Profesor Auxiliar, Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería – Universidad de Antioquia.

Calle 67 No. 53-108 Oficina 21-435 jvillega@udea.edu.co

Resumen: En este artículo se introduce el Análisis Envolvente de Datos (DEA). Para su utilización se presenta una herramienta pública gratuita, diseñada e implementada haciendo uso del toolbox de optimización de Matlab®. Se presentan los modelos básicos utilizados para la medición de la eficiencia y su implementación. Finalmente se desarrolla un ejemplo donde se ilustra el uso de DEA, y se presenta la posibilidad de realizar extensiones a la herramienta dependiendo del objetivo buscado.

Palabras Clave: Análisis Envolvente de Datos, Medición del desempeño, Eficiencia, Programación lineal

Abstract: In this article we presented an introduction to Data Envelopment Analysis (DEA). Also, we described a public free toolbox for DEA, implemented in Matlab® using the optimization toolbox. Some basic models are presented together with the details about their implementation in the toolbox. Finally we solve an illustrative example and show possible extensions to implement more advanced models.

Key words: Data Envelopment Analysis, Performance measurement, Efficiency, Linear programming.

Clasificación JEL: D24 y C61

Análisis Envolvente de Datos: Introducción y herramienta pública para su utilización

–Introducción. –I. Fundamentos del Análisis Envolvente de Datos. –II. Software para DEA –III. Una herramienta en Matlab para DEA. –IV. Ejemplo con datos de la literatura. –V. Extensiones de la herramienta –VI. Conclusiones –Anexo. –Referencias

Introducción

Todo proceso productivo (de bienes o servicios) involucra la utilización de unos recursos para transformar unas entradas (insumos) en salidas (productos) con el objetivo de satisfacer las necesidades de unos clientes. Tradicionalmente, los términos productividad y eficiencia se han usado como sinónimos al momento de medir el desempeño de dichos procesos, sin embargo conviene diferenciarlos. Por productividad se entiende al cociente de las salidas entre las entradas, "…en el caso simple en el que sólo hay un único insumo y un único producto, todo se resume a un cálculo sencillo. Sin embargo cuando tenemos más de un insumo y/o más de un producto necesitamos usar ponderaciones para construir un índice de productividad total de los factores" (Coelli et al, 2003, p. 6). Mientras que por eficiencia (técnica) se entiende "la capacidad de una empresa para conseguir la máxima producción a partir de su conjunto de insumos. La medida de eficiencia técnica varía entre 0 y 1. Un valor de 1 indica que la empresa es completamente eficiente y opera en la frontera de producción. Un valor menor que 1 refleja que la empresa opera por debajo de la frontera. La diferencia entre 1 y el valor observado mide la ineficiencia técnica" (Coelli et al, 2003, p. 17)

Para medir la eficiencia de las organizaciones se han utilizado diferentes métodos, tales como: índices basados en precios, técnicas econométricas (frontera estocástica) y recientemente el análisis envolvente de datos (DEA) (Coelli et al, 2003, p.19). Este artículo tiene dos propósitos fundamentales, primero, introducir algunos de los principios y modelos básicos de DEA, y segundo, presentar una herramienta pública gratuita para DEA, disponible en línea, que ha sido construida utilizando el toolbox de optimización de Matlab®.

I. Fundamentos del Análisis Envolvente de Datos

El análisis envolvente de datos, es una técnica no paramétrica para la medición de la eficiencia relativa de unidades organizacionales en situaciones donde existen múltiples entradas y/o salidas, o donde posiblemente es difícil medirlas monetariamente. Los orígenes de DEA se remontan a los años 70, cuando A. Charnes, W.W. Cooper y E. Rhodes (Charnes et al, 1978) desarrollaron la técnica extendiendo el trabajo de Farrel (1957).

Desde su introducción, la investigación en DEA ha sido prolífica, tanto en el ámbito teórico como el aplicado, en la bibliografía disponible (Cooper et al, 2006) se cuentan más de 2000 trabajos en diversas áreas, tales como: medición del desempeño de instituciones educativas, benchmarking de procesos logísticos, comparación de sucursales de oficinas regionales de bancos, regulación de servicios públicos, medición de productividad investigativa y docente en departamentos académicos, estudios sectoriales, entre otras. Esto ha hecho de DEA una de las áreas de la investigación de operaciones más aceptada, relevante y difundida (Gattoufi et al, 2004).

DEA generaliza en cierto sentido la definición de productividad que muchas veces se utiliza, en la cual se define una entrada y una salida ponderada:

$$Productividad = \frac{Suma\ ponderada\,de\ Salidas}{Suma\ Ponderada\,de\ Entradas} \qquad (1)$$

Las entidades que son evaluadas con DEA se conocen como DMU (Decision Making Units), término que permite referirse a un grupo amplio de unidades organizacionales que pueden ser personas, regionales de una organización, empresas, entes territoriales e incluso países.

Supóngase que se van a evaluar $\boldsymbol{n}$ DMU, cada una consume diferentes cantidades de las $\boldsymbol{m}$ entradas para producir $\boldsymbol{s}$ salidas. La *DMUj* consume la cantidad $\boldsymbol{x_{ij}}$ de la entrada *i* y produce la cantidad $\boldsymbol{y_{rj}}$ de la salida *r*. Para medir el desempeño de la *DMUo* se resuelve un problema de optimización, que busca maximizar la razón de sus salidas entre sus entradas. Como se tienen múltiples entradas y múltiples salidas se construye una salida virtual y una entrada virtual usando ponderaciones $\boldsymbol{u_r}$ y $\boldsymbol{v_i}$ para cada salida y cada entrada respectivamente. Adicionalmente se tiene, como es de esperarse en la medición del desempeño, que ninguna DMU (incluida la *DMUo*) puede tener una eficiencia mayor al 100%. Se obtiene entonces, el siguiente problema de optimización, (Charnes et al, 1978):

$$\max_{u,v} h_o = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \tag{2}$$

Sujeto a:

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq 1, \quad j = 1,\ldots,n \tag{3}$$

Al modelo descrito por las expresiones (2)-(3)se le conoce como modelo CCR, en forma de razón, por las iniciales de los autores del articulo donde se presento DEA por primera vez y por la expresión utilizada en su función objetivo y restricciones.

Dado que el problema anterior tiene infinitas soluciones óptimas, previamente Charnes y Cooper (1962), habían desarrollado un procedimiento para transformar, este problema de optimización fraccional en uno de programación lineal con la introducción de una nueva restricción, obteniéndose el siguiente programa lineal (CCR-I):

$$\max h_o \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \tag{4}$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} = 1 \qquad (5)$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \leq \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \qquad j = 1,\ldots,n \qquad (6)$$

$$u_r \geq 0, \qquad r = 1,\ldots,s \qquad (7)$$

$$v_i \geq 0, \qquad i = 1,\ldots,m \qquad (8)$$

A este segundo modelo se le conoce como CCR en el espacio de los multiplicadores, ya que las variables de decisión son los valores de ***u*** y ***v*** (multiplicadores) que serán utilizados para ponderar cada una de las entradas y salidas en la construcción de la entrada y la salida virtual de la función objetivo (2). El programa lineal formulado en (4)-(8) tiene un problema dual asociado:

$$\min \quad \theta_0 = \theta \qquad (9)$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io}, \qquad i = 1,\ldots,m \qquad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \qquad r = 1,\ldots,s \qquad (11)$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,\ldots,n \qquad (12)$$

$$\theta \text{ libre} \qquad (13)$$

Este ultimo modelo de DEA es conocido como CCR en el espacio de la envolvente, en éste se mide el desempeño θ de la DMU_O (9), como la contracción radial de las entradas (10) que es posible realizar garantizando que se obtiene un nivel mínimo de salidas (11). Para lograrlo se utiliza una DMU virtual que es una combinación lineal de todas las DMU, construida usando las variables λ_j (representada por el lado izquierdo de (10) y (11)).

Se dice que una DMU es eficiente si al resolver el problema (9)-(13) el valor de θ^* es 1. Si el valor de θ^* es inferior a 1 se dice que su eficiencia es del θ^*%.

Un error posible al usar DEA seria pensar que el problema (9)-(13) permite evaluar completamente la eficiencia de la *DMUo,* sin embargo es posible que una DMU obtenga un valor de $\theta^* = 1$ y aun así sea ineficiente, para ello se recurre a una segunda fase que resuelve el siguiente programa lineal:

$$\max \quad \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \tag{14}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta^* x_{io} \quad i = 1,\ldots,m \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro} \qquad r = 1,\ldots,s \tag{16}$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,\ldots,n \tag{17}$$

$$s_i^- \geq 0, \qquad i = 1,\ldots,m \tag{18}$$

$$s_r^+ \geq 0, \qquad r = 1,\ldots,s \tag{19}$$

En este modelo se identifican las holguras necesarias para eliminar lo que se conoce como ineficiencia de mezcla, la cual establece el exceso de entradas y el déficit de salidas que la *DMUo* aún puede tener después de ser evaluada con la primera fase.

Una DMU será considerada eficiente si obtiene θ^*=1 y además, en la segunda fase se obtiene como valor optimo de las variables de salida s_i^{-*}, s_r^{+*} = 0 (cero), es decir, no tiene holguras.

Si la DMU es ineficiente, se tendrá la información de su ineficiencia (θ*%), y además se podrían calcular usando las siguientes expresiones los valores de las entradas ($\hat{x}_{io}$) y salidas ($\hat{y}_{ro}$) necesarios para que la *DMUo* alcance la eficiencia total:

$$\hat{x}_{io} = \theta^* x_{io} - s_i^{-*}, \qquad i = 1,\ldots,m \tag{20}$$

$$\hat{y}_{r0} = y_{ro} + s_r^{+*}, \qquad r = 1,\ldots,s \tag{21}$$

Donde s_i^{-*} y s_r^{+*} son los valores óptimos de las holguras obtenidos en la segunda fase. Finalmente, también se identifica el conjunto de DMU eficientes que sirvió de comparación a las unidades ineficientes, compuesto por aquellas DMU cuyo λ es diferente de 0 (cero) en la solución óptima de la segunda fase para la *DMUo*.

Los modelos de DEA descritos previamente se caracterizan por estar orientados a entradas, ya que la mejora en el desempeño se logra contrayendo las entradas (9), también es posible tener un modelo DEA orientado a salidas, el cual se obtiene si se minimiza el inverso de la expresión (2). Esto daría lugar a los siguientes programas lineales:

$$\min q_o = \sum_{i=1}^{m} v_{io} x_{io} \tag{22}$$

Sujeto a:

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1 \tag{23}$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \leq \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \qquad j = 1,\ldots,n \tag{24}$$

$$u_r \geq 0, \qquad r = 1,\ldots,s \tag{25}$$

$$v_i \geq 0, \qquad i = 1,\ldots,m \tag{26}$$

Este modelo se conoce como CCR orientado a salidas en el espacio de los multiplicadores. Es interesante ver como para orientar a salidas la evaluación no es necesario realizar transformación alguna a los datos. Además, puede demostrarse (Cooper et al, 2006 Pág. 58) que los resultados de un modelo DEA orientado a salidas son equivalentes a los que se obtendrían con un modelo DEA orientada a entradas. El problema dual asociado con el modelo (22)-(26) es:

$$\max \quad \eta_0 = \eta \tag{27}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \le x_{io}, \qquad i = 1,\ldots,m \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge \eta y_{ro}, \qquad r = 1,\ldots,s \tag{29}$$

$$\lambda_j \ge 0, \qquad j = 1,\ldots,n \tag{30}$$

$$\eta \text{ libre} \tag{31}$$

El modelo (27)-(31) es conocido como CCR orientado a salidas en el espacio de la envolvente, y busca maximizar la salida que se puede obtener dado un nivel máximo de entradas.

Los modelos anteriores (CCR) suponen rendimientos constantes a escala, en algunas situaciones este supuesto no se cumple y es necesario restringir los valores de λ de manera tal que una DMU sea evaluada por otras DMU que tengan un tamaño similar, esto se logra utilizando el modelo BCC introducido por Banker et al (1984), que supone rendimientos variables a escala, para esto se introduce la siguiente restricción a los modelos CCR en el espacio de la envolvente:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \tag{32}$$

Existen otros modelos de DEA, que permiten abordar situaciones particulares, por ejemplo, se puede estar interesado en saber como mejorar el desempeño de las DMU sin necesidad de evaluar su eficiencia con una cantidad como θ, en este caso seria útil un modelo aditivo (Charnes et al, 1985), con el cual se pueden identificar los valores de las entradas y salidas que debería tener cada DMU para ser eficiente:

$$\max \quad \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \tag{33}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io}, \qquad i = 1,\ldots,m \tag{34}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, \qquad r = 1,\ldots,s \tag{35}$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,\ldots,n \tag{36}$$

$$s_i^- \geq 0, \qquad i = 1,\ldots,m \tag{37}$$

$$s_r^+ \geq 0, \qquad r = 1,\ldots,s \tag{38}$$

Esta es apenas una breve introducción a DEA, el lector interesado en ampliar la información relacionada con DEA, sus modelos básicos, fundamentos y aplicación puede recurrir a Cooper et al (2004) y Cooper et al (2006).

II. Software para DEA

Para el uso de DEA como herramienta en la medición de la eficiencia organizacional existen diferentes alternativas (Barr, 2004), una de ellas es utilizar software académico disponible públicamente como DEA Solver-LV (Cooper et al 2006), DEA Excel Solver (Zhu, 2003) o EMS (2007). Esta alternativa es atractiva porque dicho software es de distribución gratuita, sin embargo, algunos tienen limitaciones de tamaño en cuanto al número de DMU, entradas y salidas que pueden considerarse, ó solamente tienen disponibles unos pocos modelos.

Una segunda opción es utilizar software comercial que ha sido especialmente diseñado para DEA (Barr, 2004), esta opción es interesante puesto que el software comercial por lo general tiene buenas interfaces graficas y funcionalidades de reporte de resultados como gráficos, tablas y resúmenes. Además, las versiones comerciales implementan otros modelos no disponibles en el software académico. Sin embargo, para usuarios interesados en el desarrollo de aplicaciones que usen conceptos avanzados de DEA esta puede no ser la opción puesto que no se tiene el control sobre los problemas de optimización que se resuelven.

En busca de flexibilidad puede optarse por utilizar software de modelación algebraica o modelación matemática (AMPL (Green, 1996), GAMS (Olesen y Petersen, 1996), SAS, (Emrouznejad, 2005), etc.) esta opción es atractiva ya que aplicaciones de DEA que requerirían extensiones adicionales pueden implementarse teniendo control sobre los problemas de optimización a resolver. Sin embargo, no se cuenta con las herramientas estadísticas que permitan el análisis de los datos y de los resultados, facilidad que si se encuentra en el software comercial para DEA. Además, el costo del software comercial de modelación algebraica puede ser considerable, del orden de varios miles de dólares, para los mejores productos (OR/MS Today, 2007)

Ante las consideraciones expuestas, usar el toolbox de optimización de Matlab para implementar DEA surge como una buena alternativa, ya que se tiene la flexibilidad del software de modelación algebraica, con la facilidad para construir gráficos de resumen, con reportes que pueden exportarse a Excel, Word o archivos de texto y con la posibilidad de realizar análisis de datos de entrada y resultados con el toolbox de estadística. Todo esto a un precio menor y con una mayor difusión en la comunidad universitaria en comparación con el software de modelación algebraica.

III. Una herramienta para DEA en Matlab

La herramienta para DEA que se describe a continuación esta escrita en funciones de Matlab en las cuales se llama la función linprog del toolbox de optimización, que resuelve programas lineales usando el método símplex, métodos de punto interior o algoritmos primal-dual, según se escoja en sus parámetros.

Antes de llevar a cabo la evaluación de la eficiencia por medio de DEA se deben tener en cuenta una serie de supuestos que se tienen para las entradas y las salidas de cada DMU. Primero, es importante que el número de unidades a evaluar sea el adecuado (por lo menos $2m \times s$), pues mientras mayor sea la cantidad de factores incluidos en la evaluación, es menor el nivel de discriminación entre unidades eficientes e ineficientes, (Dyson et al, 2001). Segundo, para toda DMU las entradas y salidas deben ser mayores o iguales que cero y cada DMU debe tener por lo menos una entrada y una salida estrictamente mayor que cero, esto se puede explicar mejor teniendo en cuenta que una unidad no puede producir sin usar entradas y si usa entradas debe producir algo.

Los datos de entrada del modelo se ingresan a la herramienta por medio de un archivo en Excel el cual debe contener una matriz de entradas con m filas y n columnas, una matriz de salidas con s filas y n columnas, y si el modelo a utilizar requiere pesos o costos en las entradas y salidas, también se debe ingresar una matriz con los valores de los pesos o costos. Para los modelos con entradas y salidas no discrecionales se debe especificar cuales son discrecionales y cuales no lo son.

Es importante anotar que para poder utilizar la función linprog del toolbox de optimización de Matlab, el programa lineal se debe formular con la siguiente estructura:

$$\min fx \tag{39}$$

$$Ax \leq b \tag{40}$$

$$A_{eq}x = b_{eq} \tag{41}$$

$$lb \leq x \leq ub \tag{42}$$

Donde x y f son vectores que representan las variables de decisión y sus coeficientes en la función objetivo, A y Aeq son las matrices con los coeficientes de las variables de decisión en las restricciones de desigualdad e igualdad respectivamente, b y b_{eq} son los vectores que almacenan los términos constantes del lado derecho de las restricciones y lb, ub son vectores que almacenan los limites inferiores y superiores de las variables. Se debe tener en cuenta que si algunas variables no hacen parte de ciertas restricciones o de la función objetivo, el coeficiente que las acompaña en las matrices debe ser cero.

Esta estructura hace necesario que los modelos originales descritos en la sección 2 deban rescribirse antes de utilizar Matlab, por ejemplo, la primera fase del modelo CCR–I se reformula de la siguiente manera:

$$\min \; \theta + \sum_{j=1}^{n} 0\lambda_j \tag{43}$$

sujeto a:

$$-\theta \; x_{io} + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq 0 \quad i = 1\ldots,m \tag{44}$$

$$0\theta - \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \leq -y_{ro} \qquad r = 1,..,s \qquad (45)$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1,...,n \qquad (46)$$

$$\theta \text{ libre} \qquad (47)$$

El primer componente de la función objetivo (43) representa el valor de la eficiencia para la *DMUo* (la que esta bajo evaluación), el segundo constituye la sumatoria de las variables λ_i, nótese que el coeficiente de estas variables es cero porque no forman parte de la función objetivo, pero se tienen que incluir en la formulación. Las restricciones (44) en su primer término incluyen el producto de la eficiencia con la entrada i de la *DMUo*, y su segundo término corresponde a la suma ponderada para todas las entradas de las DMU. Las restricciones (45) incluyen al lado izquierdo un primer término que representa el valor de la eficiencia con coeficiente cero, ya que, este es un modelo orientado a entradas y por lo tanto la eficiencia no hace parte de las restricciones asociadas con las salidas, y en su segundo término la suma ponderada para todas las salidas de las DMU, al lado derecho de las restricciones (45) se incluye un término constante con el valor negativo de la salida *r* de la *DMUo*. Finalmente en (46) se restringe la no negatividad para las variables λ y en (47) se especifica que θ puede tomar cualquier valor.

La segunda fase del modelo CCR–I, formulada para resolverla con linprog de Matlab se presenta a continuación:

$$\min \ -\sum_{j=1}^{n} 0\lambda_j - \sum_{i=1}^{m} s_i^- - \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \qquad (47)$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^- + \sum_{r=1}^{s} 0 s_r^+ = \theta^* x_{io} \quad i = 1...,m \qquad (48)$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j + \sum_{i=1}^{m} 0s_i^- - s_r^+ = y_{ro} \qquad r = 1,\dots,s \tag{49}$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1,\dots,n \tag{50}$$

$$s_i^- \geq 0 \qquad i = 1\dots,m \tag{51}$$

$$s_r^+ \geq 0 \qquad r = 1,\dots,s \tag{52}$$

Nótese que fue necesario realizar modificaciones similares a las de la primera fase para poder utilizar la función linprog del toolbox de optimización de Matlab. La función objetivo, por ejemplo se debe presentar como la minimización de la suma de las holguras con signo negativo, además se incluye la sumatoria del producto de las variables de decisión λ_i por cero, ya que estas variables no hacen parte de la función objetivo de la segunda fase.

Dada la flexibilidad de la herramienta se implementaron otros modelos con cambios sencillos en la orientación o con la adición de restricciones,

Modelo Multiplicadores-I:

$$\min \quad -\sum_{r=1}^{m} u_r y_{ro} + \sum_{i=1}^{m} 0v_i \tag{54}$$

sujeto a:

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0 \qquad j = 1,\dots,n \tag{55}$$

$$\sum_{r=1}^{s} 0u_r + \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1 \tag{56}$$

$$v_i \geq 0 \qquad i = 1\dots,m \tag{57}$$

$$u_r \geq 0 \qquad r = 1,\dots,s \tag{58}$$

La función objetivo (54) representa el valor de la eficiencia de la *DMUo*, el primer término incluye la suma ponderada de la producción total de dicha DMU y el segundo la suma del producto de los pesos de las entradas por cero, dado que estas variables no se incluyen en la función objetivo. Los términos de las restricciones (55) representan la suma ponderada de las salidas y entradas para cada DMU, en la restricción (56) se incluye a la izquierda un primer término con la sumatoria del producto de los pesos para cada salida multiplicados por cero y un segundo término con la suma ponderada de las entradas para la *DMUo*, a su derecha se incluye el valor uno, finalmente las restricciones (57) y (58) garantizan la no negatividad para las variables de decisión .

Modelo Multiplicadores-O: en este modelo se busca la minimización de la suma ponderada de las entradas, por ello se deben realizar una serie de modificaciones en las restricciones y función objetivo del modelo base Multiplicadores-I, así, en la función objetivo (54) el primer término se multiplica por cero y el segundo debe ser la suma ponderada del valor de las entradas de la *DMUo*, las restricciones (55), (57) y (58) se conservan igual y en la restricción (56) el primer término que tenia coeficiente cero ahora es la suma ponderada de las salidas y el segundo término deberá estar multiplicado por cero.

Modelos BCC-I y BCC-O: en estos modelos se supone que se tienen rendimientos variables a escala. Para implementarlos en Matlab se toman como base los modelos CCR-I y CCR-O y se incorpora la restricción adicional:

$$0\theta + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 . \tag{59}$$

NDRS - NIRS: el anterior modelo BCC se puede extender relajando la condición de convexidad (59) de las siguientes formas:

Si se asume que no se puede reducir la escala de las DMU pero es posible expandirla se tiene, un modelo de retornos a escala no decrecientes (NDRS). Para implementarlo solo es necesario cambiar la restricción (59) por:

$$0\theta - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq -1 \qquad (60)$$

Por el contrario si se tienen retornos a escala no crecientes (NIRS) la restricción asociada sería:

$$0\theta + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1 \qquad (61)$$

Los dos modelos anteriores pueden ser orientados a entradas u orientados a salidas.

Modelos CCR, BCC con Entradas y Salidas no discrecionales y ambas orientaciones: para la construcción de estos modelos se tuvo como base el modelo correspondiente y su orientación, por ejemplo, Entradas no discrecionales CCR-I se implementa sobre un CCR orientado a entradas pero con cambios en las restricciones, ya que las entradas que sean no discrecionales no se pueden reducir y por lo tanto las restricciones que estén relacionadas con ellas no pueden involucrar la eficiencia y holguras en la primera y segunda fase.

Modelo Aditivo: en este modelo se busca saber cual es el valor de las holguras en las entradas y salidas de las DMU. La base para implementarlo es la segunda fase de un CCR, teniendo en cuenta que no posee orientación (no se involucra el valor de la eficiencia en las restricciones), por lo tanto no necesita recibir la eficiencia de las DMU como parámetro de entrada.

Todos los modelos antes mencionados pueden ejecutarse utilizando dos opciones, digitando los comandos correspondientes en Matlab (ver Anexo, con los nombres) o a través de la interfaz grafica que se muestra en la figura 1:

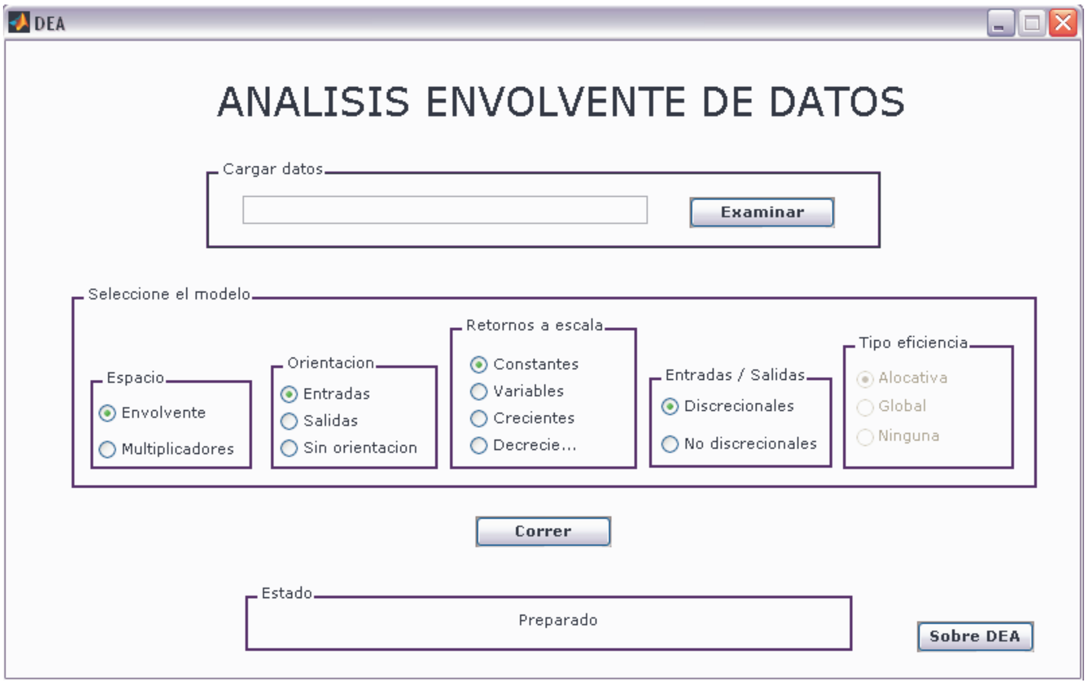

Figura 1: Interfase gráfica herramienta para DEA en Matlab

La herramienta se encuentra disponible públicamente en el sitio de descarga http://industrial.udea.edu.co/jgvillegas/Pagina%20DEA/index.html. Allí se puede encontrar la documentación, y algunos ejemplos para la entrada de datos. Es importante aclarar que para hacer uso de la herramienta el usuario debe tener instalado Matlab y alguna versión de su toolbox de optimización. La herramienta ha sido probada usando las versiones 5.3 y 7.0.4 de Matlab.

IV. Ejemplo con datos de la literatura

En el siguiente ejemplo tomado de Cooper et al, 2006, (Pág. 12) se ilustra el uso de DEA para la evaluación de 12 hospitales, cada uno con dos entradas: número de doctores y enfermeras y dos salidas: pacientes externos e internos atendidos. La siguiente tabla presenta los datos de entrada para cada hospital:

Hospital	*Doctores*	*Enfermeras*	*Pacientes Externos*	*Pacientes Internos*
A	20	151	100	90
B	19	131	150	50
C	25	160	160	55
D	27	168	180	72
E	22	158	94	66
F	55	255	230	90
G	33	235	220	88
H	31	206	152	80
I	30	244	190	100
J	50	268	250	100
K	53	306	260	147
L	38	284	250	120

Tabla 1: Entradas y salidas de cada hospital a evaluar

Para la evaluación de los hospitales se escogió un modelo CCR orientado a entradas, en el cual se mide la eficiencia como la contracción radial de las entradas que es posible realizar garantizando un nivel mínimo de salidas. Por medio de la evaluación se obtuvo el valor de la eficiencia, las proyecciones para cada entrada y salida construidas a partir de las holguras halladas en la segunda fase del modelo y el conjunto de referencia para cada hospital evaluado. Los resultados se muestran al usuario en una hoja de calculo de Excel® que puede manipular posteriormente, igualmente están disponibles como matrices y arreglos en Matlab® de manera que puedan realizar análisis posteriores con cualquiera de las dos herramientas.

DMU	Eficiencia	DOCTORES	ENFERMERAS	PAC. EXTERNOS	PAC. INTERNOS	DOCTORES*	ENFERMERAS*	PAC. EXTERNOS*	PAC. INTERNOS*	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	1	20	151	100	90	20	151	100	90	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	1	19	131	150	50	19	131	150	50	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0,883	25	160	160	55	21	141	160	55	0	0,9	0	0,14	0	0	0	0	0	0	0	0
D	1	27	168	180	72	27	168	180	72	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0,763	22	158	94	66	17	121	94	66	0,58	0,06	0	0,15	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0,835	55	255	230	90	34	213	230	90	0	0,2	0	1,11	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0,902	33	235	220	88	30	209	220	88	0,26	1,29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0,796	31	206	152	80	25	164	152	80	0,39	0,01	0	0,62	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0,960	30	244	190	100	29	207	190	100	0,65	0,84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
J	0,871	50	268	250	100	37	233	250	100	0	0	0	1,39	0	0	0	0	0	0	0	0
K	0,955	53	306	260	147	43	292	260	147	0,86	0	0	0,97	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0,958	38	284	250	120	36	260	250	120	0,65	1,24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 2: Archivo Excel con resultados análisis DEA en Matlab

Hospital	*Eficiencia*	*Doctores (proyección)*	*Enfermeras (proyección)*	*Pacientes Externos (proyección)*	*Pacientes Internos (proyección)*
A	1	20	151	100	90
B	1	19	131	150	50
C	0,88	20,85	141,23	160	55
D	1	27	168	180	72
E	0,76	16,80	120,63	94	66
F	0,83	33,80	212,87	230	90
G	0,90	29,76	208,61	220	88
H	0,80	24,69	164,04	152	80
I	0,96	28,81	207,13	190	100
J	0,87	37,50	233,33	250	100
K	0,96	43,30	292,26	260	147
L	0,96	36,41	259,53	250	120

Tabla2: Eficiencia de los hospitales y proyección de sus entradas y salidas

Hospital	*Conjunto de referencia (λ)*					
A	A	1	-	-	-	-
B	B	1	-	-	-	-
C	B	0,90	D	0,14	-	-
D	D	1	-	-	-	-
E	A	0,58	B	0,06	D	0,15
F	B	0,20	D	1,11	-	-
G	A	0,26	B	1,29	-	-
H	A	0,39	B	0,01	D	0,62
I	A	0,65	B	0,84	-	-
J	D	1,39	-	-	-	-
K	A	0,86	D	0,97	-	-
L	A	0,65	B	1,24	-	-

Tabla 3: Conjunto de referencia para cada hospital

Así, por medio de la evaluación con DEA se pueden saber cual es la eficiencia de los hospitales y cual es el conjunto de referencia para cada hospital, por ejemplo, el hospital C fue comparado con los hospitales B y D. También se obtiene la proyección de las entradas y salidas buscando que los hospitales que no fueron 100% eficientes puedan serlo, por ejemplo, el hospital C, necesita reducir el número de doctores de 25 a 21, y el número de enfermeras de 160 a 141. Con estas nuevas entradas y las mismas salidas el hospital C sería 100% eficiente.

V. Extensiones de la herramienta

La flexibilidad de la herramienta permite que se implementen otros modelos que extienden los conceptos generales expuestos previamente y que complementan la evaluación de la eficiencia simple. Por ejemplo, cuando se quisiera clasificar un conjunto de DMU dependiendo de su desempeño un modelo de ranking es el adecuado. Existen varios de estos modelos (Adler et al. 2002). En el trabajo de Restrepo y Villegas (2007) se implementaron con la herramienta dos de los métodos de ranking más conocidos en DEA: eficiencia cruzada y supereficiencia. En la elaboración de la herramienta se estudio también la posibilidad de incorporar un modelo de análisis de ventanas. Dicho modelo podría construirse basado en la estructura de los modelos básicos que ya han sido implementados.

VI. Conclusiones

En este artículo se introdujo DEA como herramienta para la medición del desempeño de unidades organizacionales, se presentaron los principales modelos y se revisaron algunas de las alternativas de software disponibles para su implementación, lo que permitió justificar el desarrollo de una herramienta para realizar Análisis Envolvente de Datos en un software de propósito general como Matlab.

Igualmente, se presentaron los detalles del desarrollado de dicha herramienta, la forma como se construyó y las transformaciones realizadas a los modelos. Esto, con el fin de que pueda ser utilizada por investigadores y usuarios de disciplinas poco familiarizadas con el software de modelación algebraica, con la posibilidad de realizar extensiones a los modelos básicos implementados.

Se espera que esta sea una nueva opción para la evaluación del desempeño en el ámbito académico y organizacional, gracias al acceso público que se le ha dado a la herramienta, a su fácil manejo y a la posibilidad de realizar análisis a los datos de entrada y a los resultados.

Anexo

A continuación se presenta la descripción de los modelos implementados en la herramienta:

MULI: En el espacio de los multiplicadores orientado a entradas.

MULTO: En el espacio de los multiplicadores orientado a salidas.

CCRI: En el espacio de la envolvente orientado a entradas, con retornos constantes a escala.

CCRO: *En* el espacio de la envolvente orientado a salidas, con retornos constantes a escala.

BCCI: En el espacio de la envolvente orientado a entradas, con retornos variables a escala.

BCCO: En el espacio de la envolvente orientado a entradas, con retornos variables a escala.

ALLOCATIVE: En el espacio de la envolvente sin orientación, para evaluar la eficiencia alocativa y con retornos a escala variables.

OVERALL: En el espacio de la envolvente sin orientación, para evaluar la eficiencia global y con retornos a escala variables.

ADIT: En el espacio de la envolvente sin orientación, con retornos a escala variables.

RECI: En el espacio de la envolvente con retornos a escala crecientes y orientado a entradas.

REDI: En el espacio de la envolvente con retornos a escala decrecientes y orientado a entradas.

RECO: En el espacio de la envolvente con retornos a escala crecientes y orientado a salidas.

REDO: En el espacio de la envolvente con retornos a escala decrecientes y orientado a salidas.

NDICCR: En el espacio de la envolvente, con retornos constantes a escala y entradas no discrecionales.

NDOCRR: En el espacio de la envolvente, con retornos constantes a escala y salidas no discrecionales.

NDIBCC: En el espacio de la envolvente, con retornos variables a escala y entradas no discrecionales.

NDOBCC: En el espacio de la envolvente, con retornos variables a escala y salidas no discrecionales.

CROSSI-A: Eficiencia Cruzada en el espacio de los multiplicadores orientado a entradas, con enfoque agresivo.

CROSSI-B: Eficiencia Cruzada en el espacio de los multiplicadores orientado a entradas, con enfoque benevolente.

CROSSO-A: Eficiencia Cruzada en el espacio de los multiplicadores orientado a salidas, con enfoque agresivo.

CROSSI-B: Eficiencia Cruzada en el espacio de los multiplicadores orientado a salidas, con enfoque benevolente.

SUPER-I: Supereficiencia en el espacio de la envolvente, orientado a entradas.

Referencias

1. ADLER, Nicole. FRIEDMAN, Lea. SINUANY-STERN, Zilla. (2002). “Review of ranking methods in the data envelopment analysis context”. *European Journal of Operational Research*. Vol. 140. pp. 249-265.

2. BANKER, Ravi. CHARNES, Abraham. COOPER, William. (1984). “Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis”. *Management Science*. Vol. 30. pp. 1078-1092.
3. BARR, Richard. (2004). “DEA Software Tools and Technology: A State-of-the-Art Survey”. En: COOPER,William. SEIFORD, Laurence. ZHU, Joe (eds). *Handbook on Data Envelopment Analysis*. Boston, Kluwer Academic Publishers. pp. 539-566
4. COELLI, Tim, ESTACHE, Antonio, PERELMAN, Sergio, TRUJILLO, Lourdes, (2003). *Una introducción a las medidas de eficiencia para reguladores de servicios públicos y de transporte*. Bogotá, Banco Mundial / Alfaomega.
5. CHARNES, Abraham. COOPER, William. (1962) “Programming with linear fractional functionals”. *Naval Research Logistics. Quarterly*. Vol. 9. pp. 181-185.
6. CHARNES, Abraham. COOPER, William. RHODES, W. E. (1978). “Measuring the efficiency of decision making units”. *European Journal of Operational Research*. Vol. 2. pp. 429-444.
7. CHARNES, Abraham. CLARK, C.T. COOPER, William. GOLANY, B. A. (1985).”Developmental study of data envelopment analysis in measuring the efficiency of maintenance units in the US air forces”. *Annals of Operation Research*. Vol. 2. pp.95-112.
8. COOPER, William. SEIFORD, Lawrence. TONE, Kaoru. (2006). *Introduction to data envelopment analysis and its uses: with DEA-solver software and references.* Springer.
9. COOPER, William. .SEIFORD, Laurence. ZHU, Joe (eds). (2004). *Handbook on Data Envelopment Analysis*. . Boston, Kluwer Academic Publishers.

10. DYSON, R.G. ALLEN, R. CAMANHO, A.S. PODINIVSKI, V.V. SARRITO, C.S. SHALE, E.A. (2001). "Pitfalls and Protocols in DEA". *European Journal of Operational Research*. Vol. 132. pp. 245-259.

11. EMROUZNEJAD, A. (2005). Measurement Efficiency and Productivity in SAS/OR. *Computers and Operations Research*. Vol. 32. pp. 1665-1683.

12. FARRELL, M.J. (1957). "The measurement of productive efficiency". *Journal of Royal Statistical Society A*. Vol. 120. pp. 253-281

13. GATTOUFI, Said. ORAL, Muhittin. KUMAR, Ashok, REISMAN, Arnold. (2004). "Epistemology of data envelopment analysis and comparison with other fields of OR/MS for relevance to applications" *Socio-Economic Planning Science*. Vol. 38. pp. 123–140

14. GREEN, R.H. (1996). "DIY DEA: Implementing Data Envelopment Analysis in the Mathematical Programming Language AMPL". *Omega*. Vol. 24. pp. 489-494.

15. OLESEN, O. PETERSEN, N. (1996). "A Presentation of GAMS for DEA". *Computers and Operations Research*. Vol. 23. pp. 323-339.

16. OR/MS Today (2007) "Linear Programming Software Survey" http://www.lionhrtpub.com/orms/surveys/LP/LP-survey.html (Julio de 2007)

17. RESTREPO, Maria I. VILLEGAS, Juan G. (2007). "Clasificación de grupos de investigación con análisis envolvente de datos". *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*. En prensa.

18. ZHU, Joe. (2003). *Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking: DEA with Spreadsheets and DEA Excel Solver*. Boston, Kluwer Academic Publishers.